

固体力学に関連する数学解析の諸問題

吉川 周二

(大分大学 理工学部 数理科学コース)

§1. はじめに

固体の運動を記述する種々の微分方程式を紹介する. 高校物理の力学では, 大きさのない理想化された質点の運動をまず学び, その後大きさはあるが変形しない剛体の運動までを学ぶ. 剛体の運動は重心の運動を考えれば質点の運動と同一視でき後は回転運動を考慮すればよいだけだが, 変形がある場合は取り扱いが複雑になる. 空間に連続的に敷き詰められた大きさのある物体の運動を記述する力学を連続体力学という. 連続体として代表的なものには液体・気体のような流体と固体がある. 連続体力学は純粋に物理学の一分野でもあるが, 物理学科よりむしろ工学分野の機械工学科で中心的に学ぶ. 実際, 機械工学科のカリキュラムの幹として材料力学・熱力学・流体力学・機械力学の四つの基礎分野をまず学ぶが, この内, 材料力学と機械力学が主に固体を扱う分野であり, 弾性力学・塑性力学・破壊力学・振動学といったより細分化・専門化された分野へと繋がる.

連続体力学の数学解析の問題としては流体の未解決問題が有名だが, 固体力学についても多くの問題が存在する. ここでは, 熱弾性や塑性といった筆者自身が興味を持っている話題の周辺の既存の結果と未解決の問題を紹介したい. また材料工学の研究者から紹介された問題のうち, 偏微分方程式の立場から取り組めそうな諸問題についても紹介する.

流体の方程式も固体の方程式ももともになる支配方程式は同一のものである. しかし流体も含めた一般の連続体力学から議論を始めて目的の微分方程式を導出する方法をとると, 整備された議論が可能ではあるが, 微分幾何や物理の詳しい知識が前提になる. 一方で, 議論を固体に限定しさらに微小変形の仮定をする限りはこのような知識なしで方程式の導出が可能である. 本稿では, 少し遠回りではあるが後者を採用し, 材料力学の立場から徐々に一般化し複雑な方程式の導出を試みる. 特に, 参考文献としては自学のしやすい日本語の文献を中心に選ぶよう努めた. 様々な立場から膨大な量の文献が発表されているが, ここで紹介・引用する文献に偏りがあることはあらかじめご理解いただきたい.

ここでは, ∂_t, ∂_x などは添え字についての偏微分を表すものとする, すなわち $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ などの略記を用いる. また, $\partial_i := \partial/\partial x_i$ ($i = 1, 2, 3$) とする.

§2. 一次元問題

応力の概念を理解するには、最初に連続体力学の文献を学ぶより材料力学の文献からスタートする方がわかりやすい。材料力学の多くの教科書(例えば [3] が読みやすい)ではまず棒の伸びのような一次元的な力のつり合いのモデルから応力(ベクトル)を導入する。本節ではまず空間一次元の問題に帰着される単軸応力状態の種々の微分方程式について紹介する。

2.1. 弾性の方程式

一様な断面積 A をもつ十分長い棒を考察する。棒の左端は壁に接着し、右端を力 P で引っ張る。ただし重力は働かないものとする。すると、棒の中の各部分に力が働き何らかのつり合い状態になっていることが予想できる。ベクトル解析の説明と同様に連続体を仮想的に微小な立方体の集合体と考えるとそれらの力は面に対して働く。そのため、連続体力学における力とは微小面に対しての力(応力)で、粗っぽくいうと応力とは適当な面を考えた際の「単位面積あたりの内力」を意味する。十分端から離れた点では応力は一様に分布することが経験則として知られている。これをサンブナン (Saint-Venant) の原理という。この原理により、棒の両端から離れた箇所の応力 \mathbf{t} は x 方向にのみ生じ、 x 軸に垂直な断面のどの微小領域でみても一様であると仮定してよい。よって、 $\mathbf{t} = (P/A, 0, 0)$ となる。このように一方向以外の方向の応力成分が十分小さい状況を単軸応力状態といい、数学の立場で見ると一次元の問題に対応する。まずは単軸応力状態(一次元)の問題について考察する。単軸応力状態において、応力ベクトル \mathbf{t} の x 成分 (σ と書くことにする) の満たすべき微分方程式は、静的 (static) な問題の場合は、微小区間 $[x, x + \Delta x]$ での力のつり合いより、 $\sigma(x)A = \sigma(x + \Delta x)A$ が成り立たなくてはならないので、

$$(2.1) \quad \partial_x \sigma = 0$$

となる。この微分方程式を解けば、高校の物理で学んだ「糸の張力はどの点でも等しい」が理解できる。このように単軸応力状態(一次元問題)の場合、自明な微分方程式である。

また動的 (dynamic) な問題の場合は、密度 ρ が一様であると仮定すると、微小区間 $[x, x + \Delta x]$ で重さは $\rho A \Delta x$ となり、 x 方向の変位 u に対して加速度は $\partial_t^2 u$ で与えられるので、

$$\rho A \Delta x \partial_t^2 u = \sigma(x + \Delta x)A - \sigma(x)A$$

が成り立つので、 $\Delta x \rightarrow 0$ とすることで

$$(2.2) \quad \rho \partial_t^2 u = \partial_x \sigma$$

で求まる。これが固体の運動方程式のあらい説明である。

運動方程式 (2.2) だけでは u と σ という 2 つの未知関数についての微分方程式は解けない。応力状態と変形を表す量の関係式である構成則 (constitutive law) を組み合わせることで、条件が揃う。変位 u は位置 x にあった点が変形によって \tilde{x} に移動したとすると、 $u := \tilde{x} - x$ が成り立つ。 $x = 0$ の点の変形で $x = 0.1$ に移動したとする。この点のすぐ近くの $x = \Delta x (> 0)$ がこの変形で $x = 0.1 + \Delta x$ に移動しても、実質この微少区間 $[0, \Delta x]$ はこの変形で伸び縮みは生じていない。そのため変位 u は変形の度合いを表す量としては不便である。変形の度合いを表す量としては、この u が大きく変化する部分が変形が大きいと考えられるので、

$$(2.3) \quad \epsilon := \partial_x u$$

が変形の度合いを表す量として利用できる. この値 ϵ をひずみという. 構成則は固体の性質によって異なるが, まず最も基本的な例として, 弾性を紹介する. 弾性とは, ひずみが生じたところに応力が生じるという 1 対 1 の関係をみたすもので, 構成則は, $f(0) = 0$ を満たす関数 f に対して $\sigma = f(\epsilon)$ で与えられる. $E := f'(0)$ とおくと, 微小ひずみの仮定のもとでテイラー近似により 2 次以上の項を無視することで, いわゆるフック (**Hooke**) の法則

$$(2.4) \quad \sigma = E\epsilon$$

が導かれる. E をヤング (**Young**) 率という. 以上, (2.2), (2.3), (2.4) をまとめると, 一次元弾性方程式:

$$\rho \partial_t^2 u = E \partial_x^2 u$$

が得られる. ϵ が小さいと仮定して f を線形化して線形弾性の微分方程式を導出したが, 構成則が非線形の超弾性の問題では, 非線形の微分方程式

$$(2.5) \quad \rho \partial_t^2 u = \partial_x f(\partial_x u)$$

が導かれる. 方程式の両辺に $\partial_t u$ をかけて空間変数について積分すると, エネルギー保存則:

$$(2.6) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho}{2} \int |\partial_t u|^2 dx + \int F(\partial_x u) dx \right) = 0, \quad F'(\epsilon) = f(\epsilon)$$

が得られる. 第一項は運動エネルギー, 第二項はひずみエネルギーなどと呼ばれる. 解析力学で学んだ通り, このエネルギーに対して Hamilton の原理を適用することで逆に (2.5) を導くこともできる.

2.2. Love の方程式

また, 上記の方程式の導出では, 単軸応力で運動は軸方向のみであることを仮定して, 軸に直角な横方向の運動は無視していた. しかし, 一般に固体は x 軸方向に引っ張るとその他の方向については縮むという性質をもつ. この縦横の比率をポアソン (**Poisson**) 比といい, ν で表す. ポアソン比が負の材料 (フォーム材) も存在する (R. Lakes [35]). これは折りたたみ傘のような構造をしていて引っ張ると膨らむ材料である. その他の方向の運動も考慮して Hamilton の原理から棒の運動方程式を導出したラブ (**Love**) の理論によると,

$$\rho \partial_t^2 u = E \partial_x^2 u + \rho \nu^2 k^2 \partial_x^2 \partial_t^2 u,$$

が導かれる. ここで k は断面の極回転半径と呼ばれる定数である. 興味深いのは, この方程式は立式の際に自然に力学的境界条件

$$P = EA \partial_x u + \rho A \nu^2 k^2 \partial_x \partial_t^2 u, \quad x = 0, L$$

があらわれる点である. ただし P は境界上で与えられる外力を表す. この方程式の導出や詳細は岸田 [9](オリジナルの文献は Love [39]) を参照されたい.

2.3. 梁（はり）の方程式

上記では主に棒に沿った (x 軸) 方向の振動を考察した. ねじり方向の変形についてはあらわれる方程式は通常の弾性方程式と変わらないため割愛する. ここでは垂直 (y 軸) 方向から曲げるような力をうける場合を考える. 横方向から力を受ける長い棒は一般に梁 (はり, beam) という. この梁の動的変形について考察する.

- Bernoulli-Euler のはり.

先ほどと同様に梁の長さ方向に x 軸をとって, 垂直 y 軸方向への曲げを考える. 「 y 軸方向のせん断変形」と「 z 軸まわりの回転運動」を無視するという仮定をして y 方向の変位 $w(x, t)$ についての運動を考えた梁のモデルを **Bernoulli-Euler** の梁などと呼び,

$$(2.7) \quad \rho A \partial_t^2 w + EI \partial_x^4 w = 0$$

である. I は断面モーメントと呼ばれる. はりの断面の形状で決まる定数である. これは例えば $w^\pm := w \pm i \partial_t \partial_x^{-2} w$ などの変換で 2 本の時間 1 階の Schrödinger 方程式に変形できることからわかる通り, 双曲型ではなく分散型方程式である.

- Rayleigh のはり.

Bernoulli-Euler の理論では「 z 軸まわりの回転」を無視していたが, これを考慮に入れたのが **Rayleigh** の梁で, 微分方程式は次で与えられる;

$$\rho A \partial_t^2 w = -EI \partial_x^4 w + \rho I \partial_t^2 \partial_x^2 w.$$

- Timoshenko のはり.

上記の 2 つのモデルでは「せん断変形」を無視していたが, これも考慮に入れたのが **Timoshenko** の梁である. 微分方程式は y 軸方向の変位 w , z 軸まわりの回転角 φ に対して,

$$(2.8) \quad \begin{cases} \rho A \partial_t^2 w = GA \partial_x (\partial_x w - \varphi), \\ \rho I \partial_t^2 \varphi = EI \partial_x^2 \varphi + GA (\partial_x w - \varphi) \end{cases}$$

で与えられる. φ を消去すると,

$$\partial_t^2 w + \partial_x^4 w - \partial_x^2 \partial_t^2 w + \partial_t^4 w = 0$$

と一本の四階微分方程式で表現できる. ここでは物理定数を規格化した.

これらのモデルは全てエネルギーに線形化の仮定が含まれている. 自然に非線形モデルも導かれる. 方程式の導出については, 弾性力学を扱う多くの文献で見つかる (例えば [9]).

2.4. 粘弾性の方程式

弾性は, 応力 σ がひずみ ϵ で決まる構成則で与えられるものであった. 一方, 粘弾性は応力がひずみ速度 $\partial_t \epsilon$ で決まる構成則で与えられるものである. 構成則が

$$(2.9) \quad \sigma = q_1 \partial_t \epsilon$$

で与えられるものは潤滑理論で用いられる粘性流体の構成則に他ならない。弾性や粘性を図 2.1 のような模型で表し、それらを電気回路のように直列や並列といった方法で組み合わせて、より複雑な挙動を示す材料の構成則を求める分野はレオロジーなどと呼ばれる。

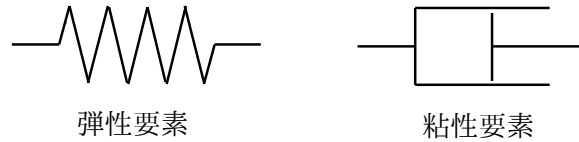


図 2.1 弾性要素と粘性要素

例えば図 2.2 のように弾性と粘性を直列につなぎ合わせると、構成則

$$(2.10) \quad \sigma + p_1 \partial_t \sigma = q_1 \partial_t \epsilon$$

が得られる。なぜなら、粘性要素に対するひずみと応力、弾性要素に対するひずみと応力をそれぞれ $\epsilon^v, \sigma^v, \epsilon^e, \sigma^e$ と書くと、直列模型の場合は応力は共通で全体の応力 σ に一致し、全体の歪み ϵ はそれぞれの歪みの和となるため、

$$\epsilon = \epsilon^v + \epsilon^e, \quad \sigma^e = \sigma^v = \sigma$$

が成り立ち、これらの各要素は粘性流体の構成則 (2.9) と弾性の構成則 (2.4) をそれぞれ満たす。すなわち、 $\partial_t \epsilon = \sigma/q_1 + \partial_t \sigma/E$ を満たすので、 $p_1 = q_1/E$ とすれば (2.10) が得られる。この直列につないだ粘弾性モデルを **Maxwell 流体** という。電気回路の計算に読み替えると、応力を電流、ひずみを電圧ととらえればよい。同様に弾性と粘性の模型を並列につなぎ合わせることで得られる構成則

$$(2.11) \quad \sigma = q_0 \epsilon + q_1 \partial_t \epsilon$$

は **Kelvin 固体** または **Voigt 固体** (または **Kelvin-Voigt 固体**) などと呼ばれる。

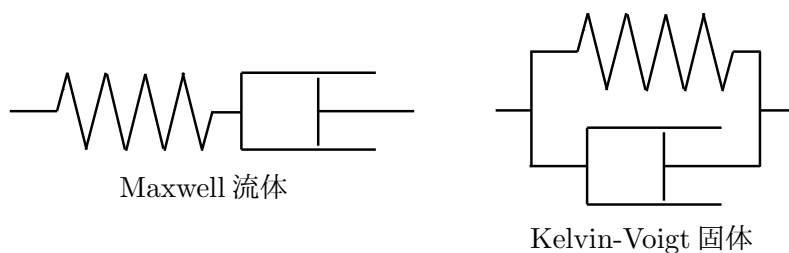


図 2.2 二要素からなる粘弾性要素

これらの構成則を (2.2) に代入すると、各種の微分方程式が導出できる。例えば、Kelvin-Voigt 固体の粘弾性方程式は、

$$\rho \partial_t^2 u - q_1 \partial_t \partial_x^2 u - q_0 \partial_x^2 u = 0$$

で与えられる。この方程式は多くの研究者によって研究されている (例えば、Shibata [47] など)。粘性流体の構成則 (2.9) を利用した熱粘性 (thermo-viscosity) についても、Dafermos-Hsiao ([27]) など多くの結果が発表されている。上記の (2.10) と (2.11) では二つの要素を組み合わせて作った構成則だが、要素の個数を 3 つや 4 つと増やせばもっと複雑な現象が記述できる。

名称	構成則
3 要素固体	$\sigma + p_1 \partial_t \sigma = q_0 \epsilon + q_1 \partial_t \epsilon$
3 要素流体	$\sigma + p_1 \partial_t \sigma = q_1 \partial_t \epsilon + q_2 \partial_t^2 \epsilon$
4 要素固体	$\sigma + p_1 \partial_t \sigma = q_0 \epsilon + q_1 \partial_t \epsilon + q_2 \partial_t^2 \epsilon$
4 要素流体	$\sigma + p_1 \partial_t \sigma + p_2 \partial_t^2 \sigma = q_1 \partial_t \epsilon + q_2 \partial_t^2 \epsilon$
\vdots	\vdots

この表からも容易に推測できるように、一般に多要素の構成則は

$$\sigma + p_1 \partial_t \sigma + p_2 \partial_t^2 \sigma + \cdots = q_0 \epsilon + q_1 \partial_t \epsilon + q_2 \partial_t^2 \epsilon + \cdots$$

のような形で表される。ラプラス変換などを用いてこの方程式を σ について解くと、

$$\sigma(t) = J(+0)\epsilon(t) + \int_0^t J'(t-\tau)\epsilon(\tau)d\tau$$

のように履歴積分 (hereditary integral) を用いて記述できる。この履歴積分を用いて記述される粘弾性の微分積分方程式に対しても多くの結果が知られている (例えば [42] など)。以上の議論では全て構成則に線形近似がなされている。構成則 (2.9) や (2.4) を非線形にした粘弾性問題も興味深い。またこの非線形の場合、3つ以上の要素からなるモデルを履歴積分で表現することは難しいため、一般に履歴積分で考察するのではなく各論になる。詳細は [20] を参照されたい。

2.5. 熱弾性の方程式

針金を曲げたりまっすぐにしたりを繰り返しているとその部分が熱くなってくる。また物体の温度が上がると熱膨張と呼ばれる現象が起こるため、応力状態に変化が生じる。このように熱の移動と物体の弾性変形の間を記述するのが熱弾性である。(2.6) で与えられたひずみエネルギーを絶対温度 $\theta (> 0)$ にも依存するものとする。応力 σ とエントロピー密度 η は

$$\sigma = \frac{\partial F}{\partial \epsilon}(\epsilon, \theta), \quad \eta = -\frac{\partial F}{\partial \theta}(\epsilon, \theta)$$

で与えられる。一方で、熱エネルギーの保存則より、

$$\partial_t \eta + \frac{\partial_x q}{\theta} = r$$

が成り立つ、ただし、 q は熱流束、 r は外部熱源である。また、熱流束は温度勾配に比例するとする Fourier の法則:

$$(2.12) \quad q = -k \partial_x \theta$$

を仮定すると方程式は、

$$-\theta \partial_t \frac{\partial F}{\partial \theta}(\epsilon, \theta) - k \partial_x^2 \theta = r.$$

これと弾性の運動方程式 (2.2) の連立方程式が熱弾性の方程式:

$$(2.13) \quad \begin{cases} \rho \partial_t^2 u = \partial_x \left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon}(\epsilon, \theta) \right), \\ -\theta \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(\epsilon, \theta) \partial_t \theta = \theta \frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial \epsilon}(\epsilon, \theta) \partial_t \epsilon + k \partial_x^2 \theta \end{cases}$$

である。ただし外部熱源は $r = 0$ とし、また F は十分なめらかであると仮定した。

熱弾性の連立方程式は準線形のため一般の F に対して大きな初期値に対する解の存在は期待できない。参照温度 $\theta_0 (> 0)$ (定数) に対して、温度差を $T := \theta - \theta_0$ で定義すると、第二方程式は T についての方程式

$$-(T + \theta_0) \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}(\epsilon, T + \theta_0) \partial_t T = \theta \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial \epsilon}(\epsilon, T + \theta_0) \partial_t \epsilon + k \partial_x^2 T,$$

に変形できる。この方程式系に対しての、小さな時間大域解の存在については多くの結果が知られている ([32])。特に熱弾性を含む多くの方程式に適用可能な系統的な理論が川島 [8] によって提唱されている。まず線形化方程式を考え、線形化方程式に対しての評価を求め、摂動として非線形方程式を考察する。実際に (2.13) を線形化し係数を 1 に規格化した方程式は、

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u + \partial_x \theta = 0, \\ \partial_t \theta - \partial_x^2 \theta + \partial_x \partial_t u = 0 \end{cases}$$

となる。Bernoulli-Euler の方程式のエネルギー保存則から求まるひずみエネルギーに対応する曲率エネルギー $F = F(\partial_x^2 u)$ を温度依存するように変更して上記と同様の手続きを経ると、熱弾性梁方程式が求まり、その線形化方程式は

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \partial_x^4 u - \partial_x^2 \theta = 0, \\ \partial_t \theta - \partial_x^2 \theta + \partial_x^2 \partial_t u = 0 \end{cases}$$

となる。線形化熱弾性の方程式もまた興味深い問題を提供する。消散波動方程式は双曲型と放物型の両方の性質を持ちある意味でこれらの中間的な方程式とみることができる。熱弾性も同様で連立の仕方によって双曲型 (または分散型) のような性質が強くなったり、放物型の性質が強くなったり、丁度中間的な性質を持つこともある。これらの性質については連立方程式の代入法と同様に一本の方程式に直してその固有値を調べることである程度解の挙動や性質が予想できる。実際にこの方法で考察すると、熱弾性方程式は連立が弱く振動部分の平滑化はなく解の特異性が伝播する。一方で熱弾性梁方程式の方は方程式全体として解析的半群を生成するなど、放物型方程式のような解の挙動を示す。このことから、これらを含めた一般の方程式として Muñoz Rivera-Racke [40] によって、 α - β 系:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + Au + A^\beta \theta = 0, \\ \partial_t \theta - A^\alpha \theta - A^\beta \partial_t u = 0 \end{cases}$$

が考案された。 α - β 系については、 α と β の領域によって、解の指数減衰や解析半群の生成や最大正則性を満たすことなどが分類できる。この分類でも端点や境界上における挙動についてはオープン問題が多い。大きな時間大域解の存在については、特別な F に対しては準線形であっても強解の存在が示せたりすることもある ([49])。

また Fourier の法則 (2.12) を採用すると熱伝導は無限伝播性を示す。その不自然さを解消したモデルとして、Fourier の法則を次の Cattaneo 則:

$$\kappa \partial_t q + q = k \partial_x \theta$$

に変更した熱弾性方程式が近年盛んに研究されており、[45] で最近の研究までまとめて解説されている。これはもとは、

$$q(t + \tau) = k \partial_x \theta$$

という時間遅れの関係をテイラー近似することで得られる。オリジナルの時間遅れの偏微分方程式を考察する研究も散見される ([44] など)。

2.6. 塑性の方程式

塑性 (plasticity) は, 図 2.3 のように荷重をかけて変形をした後に除荷してもその変形による歪みが残る現象である。

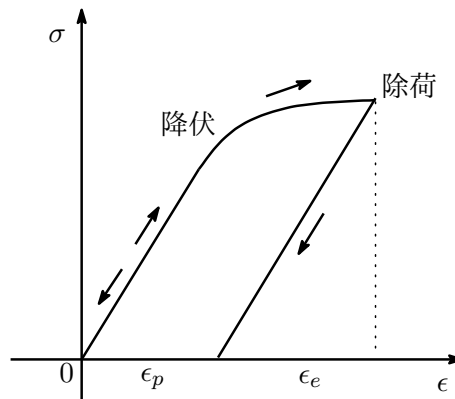


図 2.3

図 2.3 をもう少し詳しく説明すると, 最初小さい σ については ϵ は比例の関係にあり, いわゆる弾性的挙動を示す. すなわち降伏点より小さい σ であれば除荷してもひずみは 0 にもどる. しかし降伏点を超えた負荷 σ を加えると, 大きくひずみが生じるようになり, 降伏後除荷をすると, 弾性的挙動で若干のひずみ ϵ_e は回復するが, 負荷ゼロの状態でも塑性ひずみ ϵ_p が残る. このように行きと帰りで経路が異なるような物理変数の関係をヒステリシスと呼ばれる. 数学的にみると物理変数の関係が一对一の一価でなく多価関数になるため, 取り扱いが面倒になることは容易に想像できる. より正確には, 塑性 (完全塑性) とはこの変形から弾性的性質を取り除いた性質を意味する. 図 2.4 は剛・完全塑性 (rigid perfect plasticity) と呼ばれ, レオロジーにおける要素図では図 2.4 の右図のように表す.

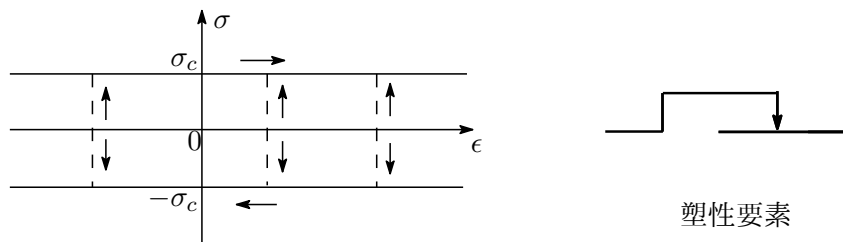


図 2.4 塑性 (剛・完全塑性) と塑性要素

この図は, $|\sigma| \leq \sigma_c$ の範囲で σ が増減しても ϵ は変化せず, σ_c より大きく ($-\sigma_c$ より小さく) になると ϵ は増加 (減少) することを表現している. 摩擦のある床に置いた質点がある力が小さい力では動かないが, 小さい力を超すと動き出すということと同様である. また図 2.5 のように弾性要素と組み合わせることで, 弾塑性 (正確には弾・完全塑性) が実現される.

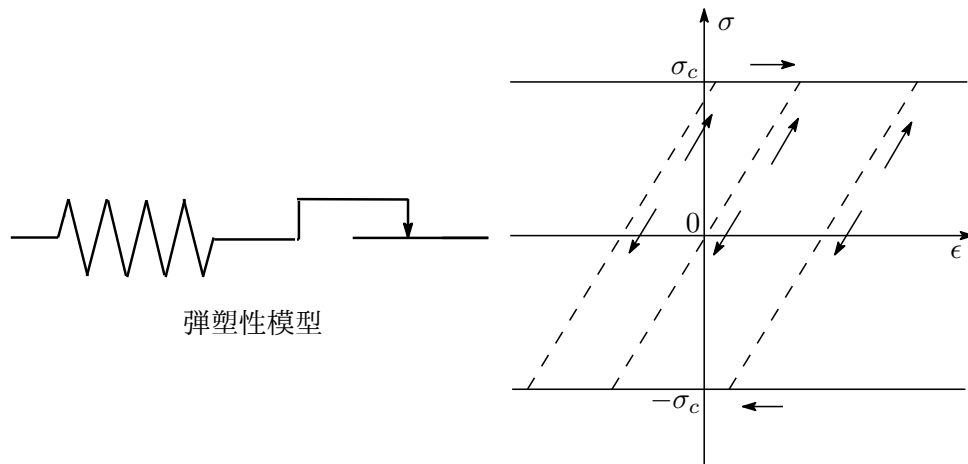


図 2.5 弾塑性 (弾・完全塑性)

図 2.4, 2.5 に対応する構成則は, これまでのように応力を歪みの一価の関数であらわすことはもはやできない. 時刻 $t = 0$ での初期状態 $(\sigma(0), \epsilon(0))$ がどのようなものか, 時刻 $t = 0$ から t までに応力がどのように与えられたかの情報 $\{\sigma(t)\}_{t \in [0, t]}$ があって, $\epsilon(t)$ が定まる. すなわち, 適当な \mathcal{E} に対して $\epsilon(t) = \mathcal{E}((\sigma(0), \epsilon(0)), \{\sigma(t)\}_{t \in [0, t]})$ のように構成則が表現できる. これはひずみと応力の関係式を得るために時間大域的に問題を考えるから複雑に見えるが, 微分を考えること, すなわち応力・ひずみが増加しているか減少しているかの関係について立式すればもう少し単純に表現できる. このようにひずみの増分に対して構成則を立式する方法をひずみ増分理論という. ひずみ増分理論に塑性判別条件下での構成則を用いて塑性変形の定式化がなされる. 工学の立場から記述された文献は基本的にこの立場で記載されている (例えば [10],[15],[22] など参照). この立場で説明すると, 応力が降伏状態にあるかどうかを判断する判定条件を与える関数 f_p (降伏関数と呼ばれる) を次を満たすように定義する.

$$(2.14) \quad \begin{cases} f_p(\sigma) < 0 & \Leftrightarrow \text{弾性範囲} \\ f_p(\sigma) = 0 & \Leftrightarrow \text{降伏状態} \end{cases}$$

降伏関数の具体的な形は材料や変形の条件によって異なるが, 上記の完全塑性の例であれば, 例えば $f_p(\sigma) := |\sigma| - |\sigma_c|$ や $f_p(\sigma) := |\sigma|^2 - |\sigma_c|^2$ などとすればよい. 弾性範囲では弾性問題と考え, 降伏状態においては, $\partial_t f_p < 0$ のとき除荷, $\partial_t f_p > 0$ のときを負荷という. 構成式として, ひずみの増分と応力が比例関係にあると仮定する

$$(2.15) \quad \partial_t \epsilon = \sigma \partial_t \lambda$$

を与える. ここで, $\partial_t \lambda$ は正の未定乗数であり, 弾性範囲または除荷では $\partial_t \lambda = 0$, 負荷では塑性状態継続として $\partial_t \lambda > 0$ とすることで塑性を表現する. $\partial_t \lambda$ の値は図 2.8 のような完全塑性変形でなく硬化があるようなときは時々刻々と変化をさせる必要がある. これは判定条件の関数 f_p を変化させることで対応できる. 増分についての記述は, 数値シミュレーションに適用する際には便利である.

このひずみ増分の数学の表現を用いると変分不等式を用いて表現をし直すことができる. 例えば完全塑性体の場合, この変分不等式は, 劣微分を用いて表現をすると,

$$\sigma \in (\partial I_{[-\sigma_c, \sigma_c]})^{-1}(\partial_t \epsilon)$$

とかける ([48] 参照). またこの対応は停止作用素と呼ばれるヒステリシス作用素の代表的なものの一つで, 多くの研究がなされている. 複数の停止作用素を組み合わせることで, 硬化のような現象も記述できる. 停止作用素や遊び作用素を組み合わせる構成されるヒステリシス作用素を **Prandtl-Ishlinskii 作用素** といふ多くの研究結果が知られている (例えば [25], [48], etc.). 塑性の偏微分方程式については, 上記の [48] の他に [33] など丁寧な解説がある. 熱伝導を組み合わせた熱弾塑性の方程式についてもいくつか研究がある (例えば, [34]). 最近の塑性についての研究としては例えば [29] を参考にされたい.

弾塑性変形の構成則は, ひずみ増分理論を用いたものも, ヒステリシス作用素を用いたものも本質的に同値である. 一方でこの対応をきちんと述べている日本語の文献は見当たらない. 特に国内での工学分野との情報の共有が不十分に思われる.

§3. 多次元問題

多次元の場合, 一次元的な負荷に対しても物体の形状や境界条件によって物体内の各点でのひずみや応力分布は複雑になる.

3.1. 応力テンソル

まず多次元の場合の応力テンソルについて説明する. 高校の物理では, 仮想的に大きさゼロで質量のみをもつ質点についての運動と大きさはあるが変形がない剛体の運動について考察した. 変形がある場合はどのように考えるかという点, 「物体の内部の任意の部分領域に対して力とモーメントのつり合いが成り立つ」という仮定の下で立式をする. また前節で述べた通り, 力は面に対して生じると考える. 微小面に対しての単位面積あたりの力を表面力ベクトルまたは応力ベクトルといい, $\mathbf{t} = \{t_i\}_{i=1,2,3}$ で表す. \mathbf{t} は面の向きに依存する.

面の方向をあらわす値としての単位法線ベクトル $\mathbf{n} = \{n_i\}_{i=1,2,3}$ に対して表面力ベクトル \mathbf{t} が定まるとすると, 応力テンソル $\sigma = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$ はこのベクトル \mathbf{n} から \mathbf{t} への対応

$$\mathbf{t} = \sigma \mathbf{n}, \quad t_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j$$

で与えられる. すなわち応力テンソルが与えられれば, その点を含むあらゆる方向の面に対しての表面力ベクトルがわかることになる.

まず簡単のために 2次元の問題を考える. 厳密には, 問題を二次元に帰着させる際には, 平面応力状態か平面ひずみ状態のいずれかの仮定をする. この仮定によって導かれる方程式が異なるが, 等方性材料を考える限りは違いとしてあらわれるのは係数のみのためあまり気にしないことにする (これらの仮定については [4] 参照). 2次元の応力テンソル $\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$ の各成分の持つ意味を考える. まず, \mathbf{n} として, 基本ベクトル $\mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 基本ベクトル $\mathbf{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を与え, 対応する表面力ベクトルを $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ と書くと,

$$\mathbf{t}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}_2 = \begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

となるので、各成分は図 3.1, 図 3.2 のような意味を持つ。 σ_{11}, σ_{22} は面に対して垂直に材料を伸ばそう (または縮めよう) とする力なので伸び応力、 σ_{21}, σ_{12} は面に平行に材料をスライドさせようとする力なのでせん断応力などと呼ばれる。

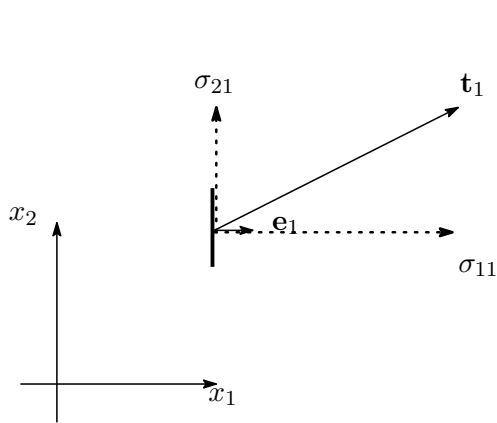


図 3.1

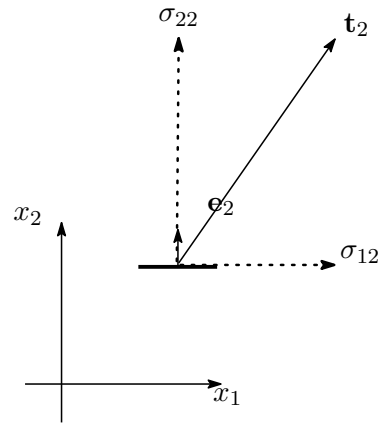


図 3.2

また上の図からもわかるように応力テンソル σ や表面力ベクトル \mathbf{t} は位置 \mathbf{x} の関数で、この応力テンソルの分布 $\sigma = \sigma(\mathbf{x})$ を求めるのが材料力学の主な課題といえる。一次元の場合のつり合いの微分方程式 (2.1) に対応する、この応力テンソル $\sigma(\mathbf{x})$ の満たす微分方程式は以下で与えられる。微小な長方形領域を考え、その中での応力ベクトルのつり合いとモーメントのつり合いを考えることで、Cauchy の応力テンソルの対称性

$$(3.1) \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i \neq j)$$

と、満たすべき平衡方程式

$$(3.2) \quad \nabla \cdot \sigma = \mathbf{0} \quad \left(\Leftrightarrow \sum_{j=1}^3 \partial_j \sigma_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \right)$$

が導かれる。導出については [4] などを参考にされたい。以上から、2次元の場合は $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ の3つの成分がわかれば応力状態が定まることがわかる。以下各軸への引っ張り応力を表す σ_{11}, σ_{22} をそれぞれ σ_1, σ_2 と、せん断方向の応力を表す σ_{12} を τ_{12} と略記することにする。

3.2. 応力解析から破壊力学へ

多次元問題の場合は、つり合いとモーメントの条件から導かれた微分方程式 (3.2) にも興味深い問題が多い。例えば、図 3.3 のように平面応力状態を考えて、原点中心に半径 a の円孔がある材料を

考察する. x_1 軸方向に無限遠で σ_0 の応力がかかっているとす.

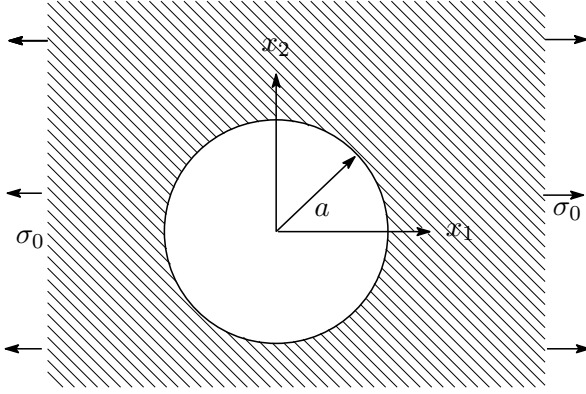


図 3.3. 円孔

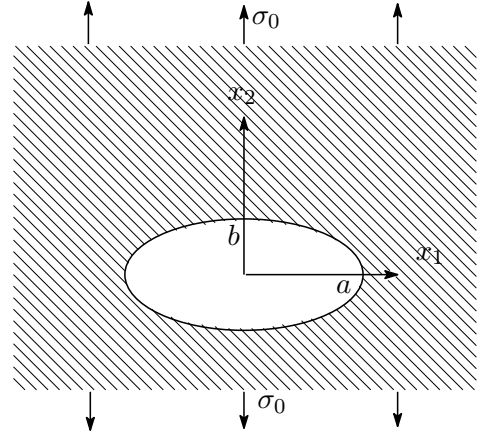


図 3.4. 楕円孔

微分方程式で表現すると,

$$\begin{cases} \partial_1 \sigma_1 + \partial_2 \tau_{12} = 0, & \partial_2 \sigma_2 + \partial_1 \tau_{12} = 0, & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \\ \lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} \sigma_1(x_1, x_2) = \sigma_0, & \lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} \sigma_2(x_1, x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} \tau_{12}(x_1, x_2) = 0, & x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

となる, また円孔の表面では接線方向と法線方向の応力はゼロでなくてはならないので, 極座標表示の応力を $(\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta})$ と表すと, もう一つの境界条件

$$\sigma_r(a, \theta) = \tau_{r\theta}(a, \theta) = 0, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

が与えられる.

まず直角座標表示の応力 $(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12})$ と極座標表示の応力 $(\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta})$ の間には

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta + \tau_{12} \sin(2\theta), \\ \sigma_\theta = \sigma_1 \sin^2 \theta + \sigma_2 \cos^2 \theta - \tau_{12} \sin(2\theta), \\ \tau_{r\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \sin(2\theta) + \tau_{12} \cos(2\theta), \end{cases}$$

の関係が成り立つ ([13] 参照, [4] はより読みやすい). よって無限遠での境界条件は極座標では,

$$\begin{aligned} \sigma_r(\infty, \theta) &= \sigma_0 \cos^2 \theta = \frac{1}{2} \sigma_0 (1 + \cos(2\theta)), \\ \sigma_\theta(\infty, \theta) &= \sigma_0 \sin^2 \theta = \frac{1}{2} \sigma_0 (1 - \cos(2\theta)), \\ \tau_{r\theta}(\infty, \theta) &= -\frac{1}{2} \sigma_0 \sin(2\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi). \end{aligned}$$

となり, この境界値問題を解くと, 明示的に,

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos(2\theta), \\ \sigma_\theta = \frac{\sigma_0}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma_0}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos(2\theta), \\ \tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin(2\theta). \end{cases}$$

が得られる. この式より, σ_θ は $r = a$ のとき $\theta = \pi/2$ で最大になることがわかり, $\frac{\max \sigma_\theta}{\sigma_0} = 3$ がわかる, この比を応力集中係数という.

円孔でなく図 3.4 のような楕円孔としても解析解すなわち応力分布が得られる ([21], [13] 参照). 特にこの解において応力が最大になる $\theta = 0$ (すなわち x_1 軸上) での x_2 方向の応力成分を $\sigma_{20}(x_1) = \sigma_2(x_1, 0)$ ($x_1 > a$) とすると

$$\sigma_{20}(x_1) = \sigma_0 \left[\frac{1}{\zeta^2 - 1} \left(\zeta^2 + \frac{a}{a-b} \right) - \frac{1}{(\zeta^2 - 1)^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{a-b}{a+b} - \frac{a+3b}{a-b} \right) \zeta^2 - \frac{(a+b)b}{(a-b)^2} \right\} - \frac{4\zeta^2}{(\zeta^2 - 1)^3} \left(\frac{b}{a+b} \zeta^2 - \frac{b}{a-b} \right) \frac{a}{a-b} \right]$$

で与えられる. ただし

$$\zeta = \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - c^2}}{c}, \quad c := \sqrt{a^2 - b^2}.$$

この楕円孔の短軸をゼロに近づける ($b \rightarrow 0$ とする) と, 楕円孔は亀裂になる. 実際, a を固定して $b \rightarrow 0$ の極限を考えると, この式は,

$$\sigma_{20} = \frac{\sigma_0 x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}}, \quad x_1 > a$$

となる. この値は $x_1 \rightarrow a+$ で無限大に発散する (すなわち応力集中係数も無限大に発散する) が,

$$K_1 := \lim_{x_1 \rightarrow a+} \sqrt{2\pi(x_1 - a)} \sigma_{20}(x_1)$$

という値を定義するとこれは有限の値 $\sigma_0 \sqrt{\pi a}$ をとる. 脆性材料などを対称とする破壊力学では, 通常は最大応力が引っ張り強さ σ_f を超えたら破断が生じるというように定式化されるが, 今回のように亀裂を有する材料に対してはまったく異なる考え方で, この K_1 が破壊靱性値 K_{1C} を超えたら亀裂の進展が始まるとする. この亀裂をグリフィス亀裂といい線形破壊力学の基礎になる.

[21] では, 一般の形状の孔に対しては解析解は知られていないため, 応用分野では有限要素法に持ち込むことが一般的であり, 安易にブラックボックス的に近似問題を考えることは大きな事故を引き起こす可能性があるという警鐘を鳴らしている. 破壊力学については, [6], [16] などが読みやすい. また, この分野についても [43] や [31] など日本人数学者らによる研究がある.

3.3. 弾性の方程式

まず, 微小変形の線形問題を考える. 弾性は応力テンソル σ_{ij} がひずみテンソル ϵ_{ij} と線形関係にあるという構成則で与えられる. 仮に

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1,2,3} C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

と書くと, C_{ijkl} は 81 種類あることになる. しかし, 微小変形理論では 2 次の項を無視することでひずみテンソルは,

$$(3.3) \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

で与えられ, これは対称テンソルであるため, ϵ_{ij} は

$$\epsilon_1 := \epsilon_{11}, \quad \epsilon_2 := \epsilon_{22}, \quad \epsilon_3 := \epsilon_{33}, \quad \gamma_{23} := 2\epsilon_{23}, \quad \gamma_{31} := 2\epsilon_{31}, \quad \gamma_{12} := 2\epsilon_{12}$$

の系 6 つの成分に帰着される. (3.1) より, Cauchy の応力テンソルも対称テンソルなので,

$$\sigma_1 := \sigma_{11}, \quad \sigma_2 := \sigma_{22}, \quad \sigma_3 := \sigma_{33}, \quad \tau_{23} := \sigma_{23}, \quad \tau_{31} := \sigma_{31}, \quad \tau_{12} := \sigma_{12}$$

と 6 つの成分がわかれば十分である. 結果として, Hooke の法則は,

$$(3.4) \quad \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ C_{1123} & C_{2223} & C_{3323} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{1131} & C_{2231} & C_{3331} & C_{2331} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & C_{2312} & C_{3112} & C_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$$

と表現できる. 6 次の係数行列が対称行列になっていることに注意すると, 独立な係数は 21 個まで減っていることがわかる.

弾性力学の入門書ではこの Hooke の法則の説明として以下のように説明をしている. まず弾性体がどの方向に応力を加えても同じように変形をするという等方性 (**isotropic**) 材料であると仮定をする. 単軸応力状態の場合は, x_1 軸方向に応力 σ_1 で引っ張ると, x_1 軸方向にひずみ ϵ_1 が生じる. ヤング率を E とすると, $\epsilon_1 = \sigma_1/E$ の関係が Hooke の法則より成り立つ. 通常材料では単軸応力のような理想的なことは起こらない. 直方体領域を考えて, x_1 軸方向に σ_1 で引っ張ると, ポアソン比 ν で x_2 軸方向と x_3 軸方向に縮み

$$\epsilon_2 = -\frac{\nu}{E}\sigma_1, \quad \epsilon_3 = -\frac{\nu}{E}\sigma_1$$

の影響をあたえる. よって, 直方体領域の x_1, x_2, x_3 方向にそれぞれ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ の垂直応力がかかると,

$$(3.5) \quad \epsilon_1 = \frac{1}{E} \{ \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \}, \quad \epsilon_2 = \frac{1}{E} \{ \sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3) \}, \quad \epsilon_3 = \frac{1}{E} \{ \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \}$$

の関係が成り立つ. せん断応力とせん断ひずみは垂直ひずみのときのように互いに影響を及ぼし合わないので, 横弾性係数 (剛性率) G を用いて,

$$(3.6) \quad \gamma_{12} = \frac{1}{G}\tau_{12}, \quad \gamma_{23} = \frac{1}{G}\tau_{23}, \quad \gamma_{31} = \frac{1}{G}\tau_{31}$$

となる. G と E の間には $E = 2(1 + \nu)G$ の関係が成り立つことが知られている. (3.5), (3.6) を応力テンソルについてとくと,

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = D^e \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}, \quad D^e = \frac{E}{1 + \nu} \begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

が得られる。この場合は弾性行列を決定する係数の数はわずか2つである。この式は、一般の式(3.4)において、回転対称の条件から導出することももちろん可能である([7] 参照)。

現在、微分方程式分野で圧倒的に研究されているのは、この等方性材料についての弾性方程式である。多くの材料が近似的にこの等方性の性質を満たすからではあるが、繊維質の材料や複合材料などは明らかに方向に依存した特徴をもつ。また金属の格子構造によっては必ずしも等方性の性質は自然ではない。等方性でない材料は異方性 (**anisotropic**) 材料と呼ばれる。異方性にも程度があり、3軸について対称だが各軸について均等ではない直交異方性 (**cubic**) 材料、2軸について対称な斜交性 (**rhombic**) 材料、1軸についてのみ対称な単斜交系 (**monoclinic**) 材料のように大きく分類できる([37] 参照)。これらはそれぞれ、

$$D_{cub}^e := \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}, \quad D_{rhomb}^e = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix},$$

$$D_{mono}^e = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}$$

のように与えられる。 D_{cub}^e , D_{rhomb}^e , D_{mono}^e はそれぞれ3個、9個、13個の係数で決定される。[24]ではより細かい分類が紹介されている。

多次元の場合の弾性方程式について説明する。変位ベクトル $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ に対して、(2.2)に対応する連立微分方程式

$$\rho \partial_t^2 u_i = \sum_{j=1}^3 \partial_j \sigma_{ij}, \quad i = 1, 2, 3$$

またはベクトルを用いた表現で、

$$\rho \partial_t^2 \mathbf{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

が得られる。前節と同様に構成則(3.4)と(3.3)を組み合わせると \mathbf{u} についての微分方程式が得られる。等方性材料については古くから結果が知られているが、異方性材料の数学解析については結果が等方性材料のそれに比べて圧倒的に少ない。実際、文献[37]や[46]などで既存の結果として触れられているのは等方性材料および直交異方性材料のみであり、たかだか係数の数が1つ増えた程度でもその取り扱いが煩雑になる。例えば、二次元斜交性材料に対する線形化熱弾性方程式の L^p - L^q 評価は、[28] などがある。

3.4. 板の方程式

1次元の場合の梁の方程式と同様に十分に薄い板について考える。梁の曲げ理論は、面積を持たない線として定義し、断面に依存する量を断面2次モーメントで代替することで導出している。板

(plate) でも同様の考え方で断面 2 次モーメントと同様の概念を定義することで、方程式を導出する。梁の方程式でせん断方向の変形を無視するというベルヌーイ-オイラーの仮定は板理論では **Kirchhoff** の仮定と呼ばれる。 xy 平面の向きに配置された厚さ h の等方性材料の板の z 方向の変位を w とすると、

$$\rho \partial_t^2 w = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta^2 w, \quad \Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$$

が得られる。この方程式は **Kirchhoff** のプレート方程式などとも呼ばれる。方程式の導出は、[7] が丁寧である。

Kirchhoff の板方程式は 1 次元のベルヌーイ-オイラーの梁方程式 (2.7) に対応するものである。Timoshenko の梁方程式 (2.8) に対応する方程式は、Mindlin によって提案され、**Mindlin-Timoshenko** モデルなどと呼ばれる (Lagnese-Lions [36] 参照)。

また上記の方程式の導出では、考える面に対しては等方性の仮定が課されているが、異方性の板についての理論や立式の詳細については、[1] を参照されたい。

3.5. 塑性

多次元の問題の場合は変形に対して各方向に応力が生じるために、1 次元の時のように単純でない。現在採用されている理論は、変形度合いと応力の大きさの度合いを求めるスカラー量を定義し、図 2.6 の 1 次元問題的に取り扱うという方法である。応力の大きさの度合いの判断基準となるのが、相応応力と呼ばれ、材料の性質によって Tresca の相応応力と呼ばれるものや、von Mises の相応応力と呼ばれるものを選び判定条件 F_p を相応応力について定義し、ひずみテンソルの増分が偏差応力テンソルに比例するとして立式を行う。塑性を題材にした文献はほとんどすべてが三次元について記述されており初学者にとって読みやすい入門書もある (例えば、[18], [15], [23] など) ため、ここでは詳細は割愛する。

§4. その他の問題

その他いくつか現在興味を持っている問題について紹介する。

4.1. 複合材料

ベニヤ板は、木目が垂直になるように接合することで、その強度を高めている。特に近年注目されているのは、炭素繊維複合材料である。このように複数の材料を組み合わせることで性質のよい材料を作ることが可能であり、そのような材料を複合材料という。複合材料は、数学的には領域によってことなる微分方程式を満たし、それらの接合面で物理条件に合った境界条件を課した問題である。

例えば、

$$\partial_t^2 u - I_{a,b}(x) \partial_t \partial_x^2 u - \partial_x^2 u = 0, \quad x \in [0, L]$$

という微分方程式を考える. ただし, $I_{a,b}$ は $0 < a < b < L$ に対して,

$$I_{a,b} = \begin{cases} 1, & x \in [a, b], \\ 0, & \text{other.} \end{cases}$$

で定義される関数とする. この微分方程式は $[a, b]$ 上で Kelvin-Voigt 型の粘性項を持つ粘弾性方程式で, それ以外では, 波動方程式を満たす. そのため, これも複合材料の方程式とみなせる. 通常の粘弾性方程式は指数安定性, すなわちエネルギーが指数減衰するが, この方程式の場合は, 指数安定にはならないことが [38] によって示されている.

これらは, 例えば粘弾性-弾性-粘弾性サンドウィッチ構造を弾性-粘弾性-弾性サンドウィッチ構造に変更するなど, 単純な組み合わせなどでも解の挙動が大きく変わることが多い. 多次元の問題については球対称の場合を除いてはほぼオープンである. 関連する近年の研究結果については [41] などを参照されたい.

物理・工学の立場からは, より複雑な設定で異方性などを取り入れた応用を目標に立式がされている. 例えば, [12], [5], [19] などを参照されたい.

4.2. 熱衝撃

お湯の入ったコップを急速に冷やすと, ヒビが入ることがある. このように急激な冷却が引き起こす熱収縮のために生じる破壊現象を熱衝撃という. 脆性材料の破壊力学に熱収縮の効果を加味すれば, モデルは得られる. 詳細についてはこのモデルについての有名な論文 [30] を引用している文献を検索すれば, 関連の結果が見つかる.

4.3. 大変形の理論

以上は基本的に変形が十分小さいと仮定をした微小変形理論の枠組みで議論してきたが, 塑性加工など分野ではこの仮定の下で議論するのでは不十分である. 大変形の理論の下では, 導かれる方程式も大きく異なる. 微小変形の枠組みでは立式の段階で微小の仮定よりラグランジュ座標やオイラー座標の区別がなくなる. 本稿であつかったひずみテンソル (3.3) は微小変形の仮定のもとで定義される微小ひずみテンソルと呼ばれるものである. 一方, 大変形理論の場合はこれらを有限ひずみテンソルにおきかえる必要がある, また有限ひずみテンソルは座標系の選び方によって数種類のひずみテンソルが定義される. 更にひずみテンソルとして何を採用するのかによって, 対応する応力テンソルも異なる ([2], [11] など参照). 大変形の理論については [14], [26] などを参照されたい. 特に [14] は邦訳版であり, 有限要素法によるシミュレーションを意識しつつ有限ひずみの問題についても詳しい解説が与えられている良書である.

§5. 最後に

本稿では固体力学のモデルとして導出される種々の偏微分方程式を紹介した. 弾性・粘性・塑性のレオロジカルな性質に加えて, 熱伝導を加味したり, 弾性と粘性における線形近似の構成則の非線形化をするなど多くの微分方程式が系統的に導出できる. さらに多次元の場合は, 線形弾性で

あっても等方性の仮定を取り除くだけでも問題は難しくなる。これらを組み合わせた複合材料など、問題は山積みである。

また導出についての詳しい解説やいくつかの問題については紙面の都合上省略したが、数学を専門とする者が参考にあげた工学や物理の書籍を熟読するのは時間がかかり、効率的ではない。そこで、できる限り数学の立場から読みやすいところがけた解説を筆者のウェブページ上 (<http://lab.ms.oita-u.ac.jp/yoshikawa/res.html>) にアップロードする予定である。

数学解析の方法としては、いろいろな立場の結果が見つかる。純粋に数学的に新しい構造や便利な手法を見つけることを目的として、その一例としてこれらの方程式を挙げるものもあれば、数学的な新しさというより実用・応用を主眼においた結果もある。また、破壊力学の数学解析や逆問題による弾性解析などについても興味深い問題が多くある (例えば [17], [31] など)。

末筆ですが、このような貴重な機会をくださいました加納理成先生 (高知大学) と村瀬勇介先生 (名城大学) に感謝申し上げます。本稿における内容の多くは Konstanz 大学の Reinhard Racke 先生と愛媛大学の黄木景二先生から提供されたものです。改めてここに謝意を表します。また本会のためにご支援くださいましたすべての諸先生・諸先輩方に心より感謝申し上げます。

参考文献

- [1] S.A. アムバルツミヤン, 異方弾性版の理論, 森北出版, 1975
- [2] 石井 建樹, 只野 裕一, 加藤 準治, 車谷 麻緒, 例題で学ぶ連続体力学, 森北出版, 2016.
- [3] 石田 良平, 秋田 剛, ビジュアルアプローチ 材料力学, 森北出版, 2011.
- [4] 伊藤 勝悦, 弾性力学入門 - ていねいな数式展開で基礎をしっかりと理解する, 森北出版, 2006.
- [5] 岡部 朋永, 矢代 茂樹, 複合材料の力学, 共立出版, 2015.
- [6] 岡村 弘之, 線形破壊力学入門, 破壊力学と材料強度講座 1, 培風館, 1976.
- [7] 金子 晃, 偏微分方程式入門, 基礎数学 12, 東京大学出版会, 1998.
- [8] 川島 秀一, 緩和的的双曲型保存則系の数学解析, 数学 **61** (2009), 248–269.
- [9] 岸田 敬三, 固体の動力学, 培風館, 1993.
- [10] 北川 浩, 塑性力学の基礎, 日刊工業新聞社, 1979.
- [11] 京谷 孝史, よくわかる連続体力学ノート, 森北出版, 2008.
- [12] 座古 勝, 松本 金矢, 複合材料の挙動解析, 応用数値計算ライブラリ, 朝倉書店, 1998.
- [13] S.P. ティモシェンコ, J.N. グーディア, 弾性論, コロナ社, 1973 (S. Timoshenko, J.N. Goodier, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London, 1951).
- [14] EA de Souza Neto, D Perić, DRJ Owen, 非線形有限要素法 弾塑性解析の理論と実践, 森北出版, 2012 (EA de Souza Neto, D Perić, DRJ Owen, *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*, John Wiley & Sons Ltd, 2008).
- [15] 富田 佳宏, 弾塑性力学の基礎と応用 -数値シミュレーションへの導入-, 森北出版, 1995.
- [16] 中井 善一, 久保 司郎, 機械工学基礎課程 破壊力学, 朝倉書店, 2014.
- [17] 中村 玄, 弾性体の逆問題, 数学 **53** (2001), 113–124.

- [18] 日本塑性加工学会編, 例題で学ぶはじめての塑性力学, 森北出版, 2009.
- [19] 野田 尚昭, 堀田 源治, 佐野 義一, 高瀬 康, 異種接合剤の材料力学と応力集中, コロナ社, 2017.
- [20] W. フリュージェ, 粘弾性学 (固体の力学シリーズ), 培風館, 1973.
- [21] 村上 敬宜, 応力集中の考え方, 養賢堂, 2006.
- [22] 山田 嘉昭, 塑性・粘弾性, コンピュータによる構造工学講座 II-2-A, 培風館, 1972.
- [23] 吉田 総仁, 弾塑性力学の基礎, 共立出版, 1997.
- [24] エリ・ランダウ, イェ・リフシッツ, 弾性理論 (ランダウ・リフシッツ理論物理学教程), 東京図書, 1989 (L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Course of theoretical physics. Vol. 7. Theory of elasticity*, Translated from the Russian by J. B. Sykes and W. H. Reid. Third edition. Pergamon Press, Oxford, 1986).
- [25] Brokate, J. Sprekels, Hysteresis and Phase Transitions, Applied Mathematical Sciences, 121, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [26] A. Bertram, Elasticity and plasticity of large deformations, an introduction, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008
- [27] C.M. Dafermos, L. Hsiao, *Global smooth thermomechanical processes in one-dimensional nonlinear thermoviscoelasticity*, Nonlinear Anal., **6** (1982), 435–454.
- [28] M.S. Doll, *L^p - L^q -estimate of the linear equations of thermoelasticity for rhombic media in \mathbb{R}^2* , Thesis in University of Konstanz, (2005)
- [29] T. Fukao, R. Kano, *Time-dependence of the threshold function in the perfect plasticity model*, preprint.
- [30] D.P.H. Hasselman, *Unified theory of thermal shock fracture initiation and crack propagation in brittle ceramics*, J. Amer. Ceram. Soc., **52** (1969), 600–604.
- [31] H. Ito, *On a problem for a kinked crack*, http://www.rs.tus.ac.jp/h-itou/pdf/proc_itou.pdf
- [32] S. Jiang, R. Racke, Evolution equations in thermoelasticity, Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 112. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000.
- [33] P. Krejčí, Hysteresis, convexity and dissipation in hyperbolic equations, GAKUTO International Series. Mathematical Sciences and Applications, 8. Gakkotosho Co., Ltd., Tokyo, 1996.
- [34] P. Krejčí, J. Sprekels, *Temperature-dependent hysteresis in one-dimensional thermovisco-elastoplasticity*, Appl. Math., **43** (1998), 173–205.
- [35] R. Lakes, *Foam structures with a negative Poisson's ratio*, Science, **235** (1987), 1038–1040.
- [36] J. Lagnese, J.-L. Lions, Modelling analysis and control of thin plates, Recherches en Mathematiques Appliquees, 6. Masson, Paris, 1988.
- [37] R. Leis, Initial-boundary value problems in mathematical physics, B. G. Teubner, Stuttgart; John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1986.
- [38] K. Liu, Z. Liu, *Exponential decay of energy of the Euler-Bernulli beam with locally distributed Kelvin-Voigt damping*, SIAM J. Control. Optim., **36** (1998), 1086–1098.
- [39] A.E.H. Love, The Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge University Press.
- [40] J.E. Muñoz Rivera, R. Racke, *Large solutions and smoothing properties for nonlinear thermoelastic systems*, J. Differential Equations, **127** (1996), 454–483.

- [41] J.E. Muñoz Rivera, R. Racke, *Transmission problems in (thermo-)viscoelasticity with Kelvin-Voigt damping: non-exponential, strong and polynomial stability*, SIAM J. Math. Anal., **49** (2017), 3741–3765.
- [42] M. Okada, S. Kawashima, *Global solutions to the equation of thermoelasticity with fading memory*, J. Differential Equations, **263** (2017), 338–364.
- [43] K. Ohtsuka, *Generalized J-integral and its applications I -basic theory-*, Japan J. Appl. Math., **2** (1985), 329–350.
- [44] R. Quintanilla, R. Racke, *Qualitative aspects in dual-phase-lag heat conduction*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, Math. Phys. Eng. Sci., **463** (2007), 659–674.
- [45] R. Racke, *Thermoelasticity*, Handbook of Differential Equations, Evolutionary Equations, Vol. 5,
- [46] R. Racke, *Lectures on nonlinear evolution equations. Initial value problems*, Second edition. Birkhauser/Springer, Cham, 2015.
- [47] Y. Shibata, *On the rate of decay of solutions to linear viscoelastic equation*, Math. Methods Appl. Sci., **23** (2000), 203–226.
- [48] A. Visintin, *Differential models of hysteresis*, Applied Mathematical Sciences, 111, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [49] S. Yoshikawa, I. Pawłow, W.M. Zajączkowski, *Quasi-linear thermoelasticity system arising in shape memory materials*, SIAM J. Math. Anal., **38** (2007), 1733–1759.

〒 870-1192

大分県大分市旦野原 700 番
大分大学 理工学部 数理科学コース
E-mail: yoshikawa@oita-u.ac.jp